

Física y Nudos: Una exposición sobre los invariantes presentes en la naturaleza.

Mentora: Isabela Recio

Aprendiz: Abel Hernández

Universität Hamburg

Universidad de San Carlos de Guatemala

Proyecto de tipo expositivo

Resumen

La teoría de nudos es un área relativamente joven de las matemáticas y relacionada desde sus inicios con fenómenos físicos. Sus primeros estudios datan alrededor de 1880, cuando William Thomson, mejor conocido como Lord Kelvin, consideró la hipótesis de que los átomos eran nudos en una sustancia llamada éter [1]. La pregunta principal de la teoría de nudos es la de diferenciar si dos nudos son equivalentes. Aunque esta pregunta parezca inocente, ha llevado a los matemáticos a buscar herramientas sofisticadas para darle respuesta. Algunas de estas herramientas provienen de la topología algebraica, como el grupo fundamental de un nudo a través del teorema de Seifert-van Kampen. Asimismo el estudio de los nudos ha dado como resultado la creación de algunas herramientas algebraicas como el polinomio de Alexander y el polinomio de Jones. Esta última construcción es la que usaremos para presentar algunas de las conexiones modernas entre los nudos y la física, siendo algunas de estas las expuestas por Kauffman en [5], incluyendo relaciones con física de partículas y materia condensada.

1. Definiciones preliminares

Los nudos son objetos bastante comunes en nuestro día a día y si tomamos una cuerda es fácil encontrar varios de estos, sin embargo para manejarlos de una manera más precisa necesitamos un modelo que nos acerque más a caracterizarlos.

Definición 1.1. Sea $K \subset \mathbb{R}^3$. Decimos que K es un nudo si existe un homeomorfismo en el espacio tridimensional \mathbb{R}^3 , $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow K$ donde \mathbb{S}^1 es el círculo unitario $\mathbb{S}^1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$.

Definición 1.2. Diremos que $L \subset \mathbb{R}^3$ es un enlace si es la unión disjunta de nudos.

Asimismo definimos la equivalencia entre nudos de la siguiente forma:

Definición 1.3. Dos nudos K_1 y K_2 son equivalentes si existe un homeomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de forma que $f(K_1) = K_2$.

Usualmente representaremos nudos por medio de *diagramas*, siendo el diagrama la proyección del nudo a \mathbb{R}^2 . Dicha proyección usualmente la dibujaremos como una curva en la que, en cada cruce se borra parte de una curva dependiendo el nudo, para indicar que segmento pasa por encima o debajo como en la Figura 1.

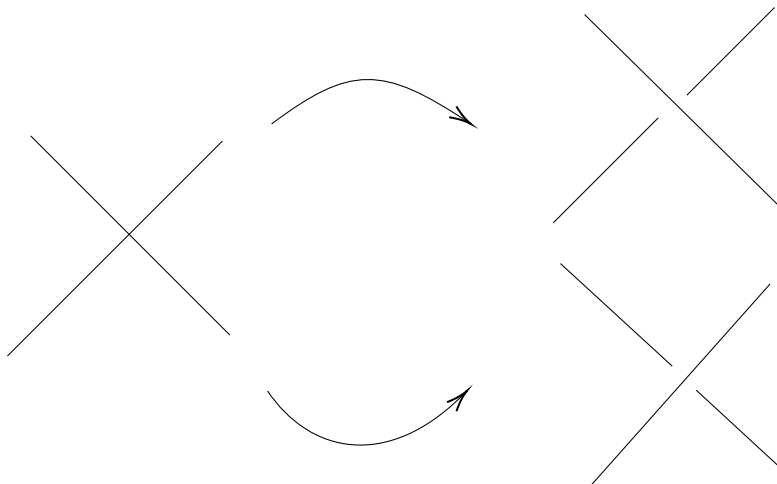


Figura 1: Construcción de los diagramas para un nudo.

Ejemplo 1.4. *El nudo más sencillo es conocido como nudo trivial o no nudo, siendo este \mathbb{S}^1 descrito en 1.1.*

Ejemplo 1.5. *Un nudo el cual puede mostrarse (mediante algunas herramientas que desarrollaremos posteriormente) que no es equivalente al círculo \mathbb{S}^1 visto como nudo es el nudo trébol 3_1 , el cual podemos ver en la Figura 2:*

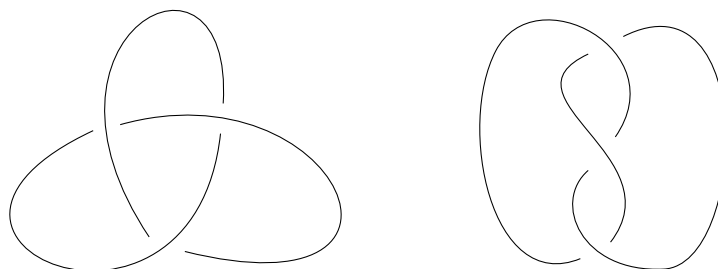


Figura 2: Dos representaciones del nudo trébol.

En general, podemos encontrar muchísimos nudos dentro de \mathbb{R}^3 , de los cuales algunos podemos encontrarlos recopilados en [1, p. 280-290].

Notemos que para que dos nudos sean equivalentes no es suficiente que exista un homeomorfismo entre ellos, si no que debe ser de todo el ambiente en el que viven (en este caso \mathbb{R}^3). Veamos esto con un ejemplo de lo que pasaría si pensamos un nudo en \mathbb{R}^2 .

Ejemplo 1.6. *Los polígonos simples cerrados en \mathbb{R}^2 son equivalentes al nudo trivial.*

Para probar esto, usaremos el siguiente resultado. En [2] podemos encontrar una extensión del teorema de la curva de Jordan, el cual no solo nos garantiza que una curva simple cerrada podemos separa el plano

en dos regiones un “interior” y un “exterior” si no que además estas regiones son homeomorfas al interior y exterior de \mathbb{S}^1 vistos como subconjuntos de \mathbb{R}^2 , respectivamente. Por tanto, por el teorema de Jordan-Schoenflies descrito anteriormente se tiene que para la curva poligonal considerada existe $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ con estas propiedades.

El ejemplo anterior nos muestra que a veces necesitamos resultados bastante fuertes para hacer pruebas relativamente sencillas, por lo que antes de seguir trataremos de robustecer la teoría e introducir algunas definiciones para poder desarrollar más herramientas.

Definición 1.7. *Un nudo se dice poligonal si es una curva cerrada que está formada por una cantidad finita de segmentos de recta.*

Definición 1.8. *Diremos que un nudo es dócil si es equivalente a un nudo poligonal, de lo contrario se dirá salvaje.*

La mayoría de teoría para nudos se ha desarrollado para nudos dóciles, por lo que nos centraremos únicamente en estos de ahora en adelante, claro sin olvidarnos de los salvajes y presentando algunos resultados para estos si fuese necesario. Para ello, definiremos un concepto importante, el *stick number* de un nudo.

Definición 1.9. *El stick number $s(K)$ de un nudo K es el menor número de segmentos de recta necesarios para formar un nudo equivalente a K .*

con esto definido probemos un pequeño resultado

Proposición 1.10 (Negami [7]). *Sea $c(K)$ el mínimo número de cruces para cualquier proyección de un nudo K , si K es no trivial, entonces*

$$\frac{5 + \sqrt{25 + 8(c(K) - 2)}}{2} \leq s(K)$$

Demostración. Consideremos la representación poligonal del nudo, y supongamos que esta viene dada por el mínimo número de segmentos necesarios para formar el nudo, es decir $s(K)$ segmentos. Ahora lo rotaremos de forma que uno de estos segmentos sea paralelo a el eje z , como en la Figura 3. Notemos que con esta modificación, en la proyección del nudo tendremos una arista menos.

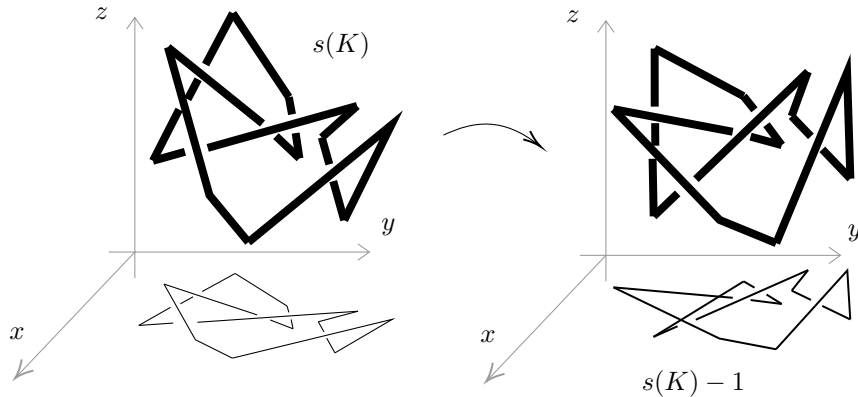


Figura 3: Rotación de la prueba

Por lo que, el diagrama del nudo rotado tendrá C cruces, tal que $c(K) \leq C$ y tendrá $s(K) - 1$ aristas (podría tener menos incluso, pero en ese caso la prueba es análoga e igual se puede llegar a la misma desigualdad).

Como cada arista no puede cruzarse con sus aristas adyacentes a lo más tendremos $\frac{(s(K)-1)(s(K)-1-3)}{2}$ cruces, luego,

$$\begin{aligned} c(K) &\leq C \leq \frac{(s(K)-1)(s(K)-4)}{2} \\ 2c(K) &\leq (s(K))^2 - 5s(K) + 4 \\ 8c(K) &\leq 4(s(K))^2 - 20s(K) + 16 \\ 25 + 8(c(K) - 2) &\leq (2s(K) - 5)^2. \end{aligned}$$

Como para un nudo distinto del trivial ambos lados de la desigualdad son positivos podemos sacar raíz cuadrada y tendremos

$$\begin{aligned} \sqrt{25 + 8(c(K) - 2)} &\leq 2s(K) - 5 \\ \frac{5 + \sqrt{25 + 8(c(K) - 2)}}{2} &\leq s(K) \end{aligned}$$

■

Y bien, podemos pensar en una prueba análoga para nudos arbitrarios y preguntarnos ¿qué pasaría si tuviéramos un nudo con infinitos cruces? Resulta que esto implicaría que el stick number del nudo también debería ser infinito, por lo que este nudo no puede ser dócil. Otra forma de verlo es la siguiente; si se considera la función

$$f(x) = \frac{5 + \sqrt{25 + 8(x - 2)}}{2}$$

esta es creciente y no acotada; por lo que si el número de cruces es muy grande el stick number también lo será, eso nos dice que si tenemos un número infinito de cruces entonces el stick number no puede ser finito. Esto implica que los nudos con un número infinito de cruces necesariamente son salvajes. El converso, apunta a ser cierto, pues existen cotas superiores para $s(K)$ en función de $c(K)$, una de ellas dada por Youngsik Huh y Seungsang Oh en [4]:

$$s(K) \leq \frac{3}{2}(c(K) + 1).$$

Sin embargo, en parte de la prueba para esta desigualdad se usan los *movimientos de Reidemeister* los cuales no aseguran equivalencia de nudos si de nudos si estos son salvajes, por lo que esto no asegura el converso. De estos movimientos hablaremos más a detalle ahora.

Teorema 1.11 (Teorema de Reidemeister). *Dos nudos son equivalentes si y solo si, sus diagramas están relacionados por una sucesión finita de movimientos de Reidemeister, vistas en la Figura 4.*

Basta con dar una sucesión de estos movimientos aplicados al diagrama del nudo que lo transformen en el diagrama de otro nudo para mostrar que ambos son equivalentes. Si dicha sucesión existe diremos que existe una *isotopía de ambiente* entre ambos nudos o que los nudos son *isotópicos*.

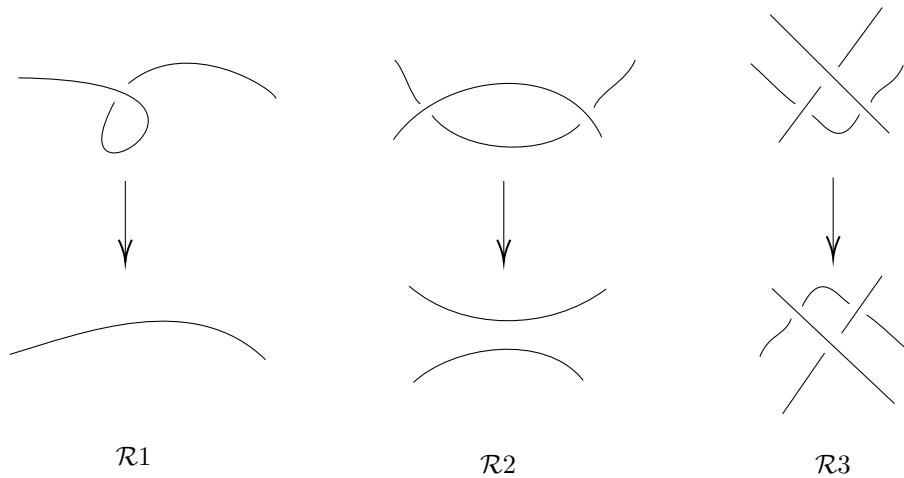


Figura 4: Movimientos de Reidemeister.

Si la sucesión de movimientos solo contiene movimientos del tipo $\mathcal{R}2$ y $\mathcal{R}3$, a la equivalencia la llamaremos *isotopía regular*. Ahora notemos lo siguiente, los nudos con los que estamos trabajando son variedades de dimensión 1 que viven en \mathbb{R}^3 , una variedad de dimensión 3, por lo que resulta natural hacerse la pregunta, ¿valdría la pena considerar nudos en una variedad de dimensión 2 o en una variedad de dimensión 4? Resulta que en particular, estos ejemplos no son muy interesantes si se toma a \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^4 , puesto que en un caso la teoría de nudos, se reduce a un solo nudo y en la otra, hay demasiada libertad y la teoría de nudos se vuelve trivial. Sin embargo podríamos apuntar en otra dirección y pensar ¿Qué ocurre si consideramos “nudos” de dimensión mayor? Esto se traduce a pensar en superficies y si tomamos \mathbb{R}^4 como el espacio ambiente (pues de manera similar a los nudos en \mathbb{R}^3 tendremos un caso de codimensión 2) obtendremos algo muy curioso. Al definir la noción de isotopía en superficies, existen análogos de los movimientos de Reidemeister llamados *movie moves* de los cuales podemos ver algunos en la Figura 5. Teniendo ahora 15 movimientos tales que si existe una sucesión de ellos, tendremos una isotopía ambiente entre superficies.

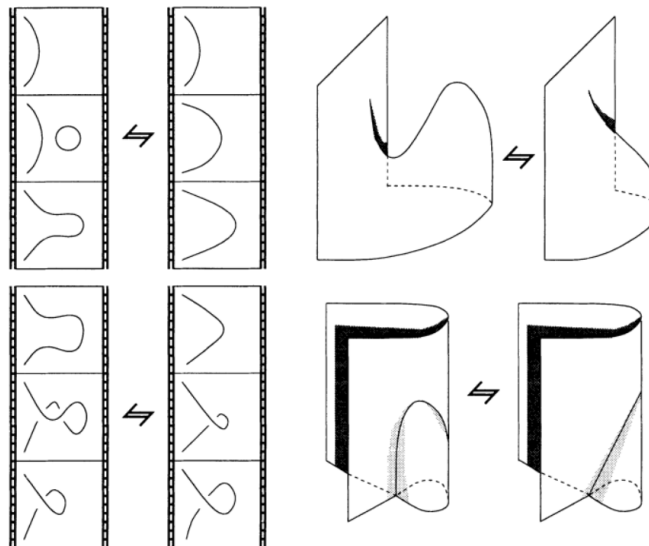


Figura 5: Algunos movie moves, imagen recuperada de [3].

2. Teorema de Seifert-van Kampen y grupos de nudos

Daremos un vistazo a una de las herramientas más importantes dentro de la topología algebraica, el grupo fundamental de un nudo y el teorema de Seifert-van Kampen, antes recopilando algunas definiciones que pueden ser encontradas en [6].

Definición 2.1. Sea X un espacio topológico; sea x_0 un punto de X . Un camino en X que comienza y termina en x_0 es llamado camino cerrado con punto base x_0 . El conjunto de cociente bajo la relación de equivalencia de homotopía de caminos con punto base x_0 , con la operación $*$ que se basa en pegar dos caminos, es llamado grupo fundamental de X relativo a el punto base x_0 . Este es denotado por $\pi_1(X, x_0)$.

Puede mostrarse (aunque no es trivial) que para espacios que nos interesan, el grupo fundamental no depende de la elección del punto x_0 por lo que podemos escribirnos $\pi_1(X)$ de ahora en adelante. En este caso, nos interesa un grupo fundamental muy concreto:

Definición 2.2. Si K es un nudo, llamamos a $\pi_1(\mathbb{R}^3 - K)$ el grupo del nudo K .

Antes de enunciar el teorema conviene definir lo que es una presentación de grupos, que es una forma de definir un grupo sin dar explícitamente sus elementos.

Definición 2.3. Si G es un grupo, una presentación de G consiste en una familia $\{a_\alpha\}$ de generadores de G , con un conjunto de relaciones $\{r_\beta\}$ para elementos de G .

Para el grupo de un nudo K usualmente se usan las Presentaciones de Wirtinger $\langle S|R \rangle$, donde S es el conjunto de generadores de $\pi_1(\mathbb{R}^3 - K)$ y R es el conjunto de relaciones. Con esto enunciado enunciaremos el teorema de Seifert-van Kampen:

Teorema 2.4 (Seifert-van Kampen). Sea $X = U \cup V$, donde U y V son abiertos en X ; si U, V y $U \cap V$ son conexos por caminos; sea $x_0 \in U \cap V$. Sea H un grupo y sean

$$\phi_1 : \pi_1(U, x_0) \rightarrow H \quad \phi_2 : \pi_1(V, x_0) \rightarrow H$$

sean homomorfismos. Sean i_1, i_2, j_1, j_2 los homomorfismos indicados en el siguiente diagrama inducido por inclusión.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \pi_1(U, x_0) & & \\
 & \nearrow i_1 & \downarrow j_1 & \searrow \phi_1 & \\
 \pi_1(U \cap V, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{\Phi} & H \\
 & \searrow i_2 & \uparrow j_2 & \nearrow \phi_2 & \\
 & & \pi_1(V, x_0) & &
 \end{array}$$

Si $\phi_1 \circ i_1 = \phi_2 \circ i_2$, entonces, existe un homomorfismo único $\Phi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow H$ tal que $\Phi \circ j_1 = \phi_1$ y $\Phi \circ j_2 = \phi_2$.

Esto nos da una forma de calcular grupos fundamentales que podemos usar para calcular explícitamente el grupo de un nudo

Teorema 2.5. *Si existe una isotopía ambiente entre K_1 y K_2 entonces sus grupos de nudo son isomorfos, es decir $\pi_1(\mathbb{R}^3 - K_1) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 - K_2)$.*

En otras palabras, el grupo de un nudo es un *invariante* del nudo bajo isotopías de ambiente. El término invariante lo definiremos con mayor detalle en la siguiente sección. Con estas herramientas podemos mostrar lo hablado en el ejemplo 1.5, lo cual nos dice que, el nudo trébol 3_1 y el nudo trivial no son equivalentes. Para ello tomaremos sus grupos fundamentales, los cuales pueden fueron calculados gracias al teorema de Seifert-van Kampen en el capítulo 6 de [8].

$$\pi_1 \left(\mathbb{R}^3 - \text{trébol} \right) = \langle x, y \mid xyx = yxy \rangle \quad (2.6)$$

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 - \bigcirc) \cong \mathbb{Z} \quad (2.7)$$

Con esto, basta con ver que el grupo 2.6 no es cíclico para obtener que ambos grupos no pueden ser isomorfos, y que por tanto no puede existir una isotopía ambiente entre ambos. Esto nos da un primer vistazo a los invariantes de nudos a los que entraremos de lleno en la siguiente sección.

3. Invariantes algebraicos

3.1. Estados y corchetes

Una técnica para diferenciar dos nudos es tratar de formular invariantes algebraicos que caractericen los nudos. En este contexto consideraremos un invariante como una propiedad que se preserve bajo isotopías. Un ejemplo de un invariante (no algebraico) es la tricolorabilidad de un nudo¹. Veremos también que a un enlace le podemos asignar polinomios en función de los cruces de su diagrama. Para ello consideremos lo siguiente:

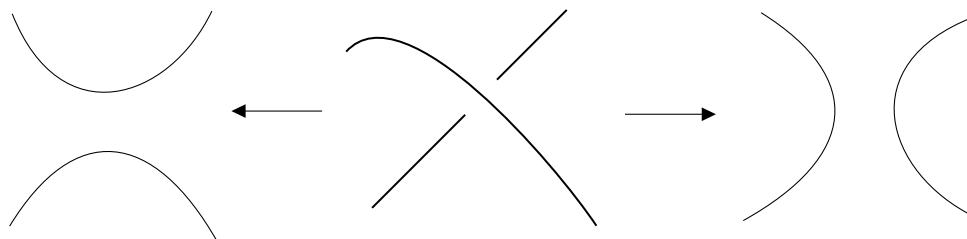


Figura 6: Descomposición de un cruce

Cada cruce \times de un diagrama lo podemos *descomponer* de dos formas distintas, como en la Figura 6, y así mismo podemos fijarnos que cada cruce separa localmente en cuatro regiones el ambiente en el que vive el enlace. De esta manera, identificando con las letras A y B dichas regiones en una vecindad del cruce y, descomponiendo todos los cruces obtendremos el *árbol de resoluciones de un enlace*. Con dicha identificación de las regiones, a las cuales llamaremos *etiquetas del estado*, podremos reconstruir el diagrama original del enlace como en la siguiente figura.

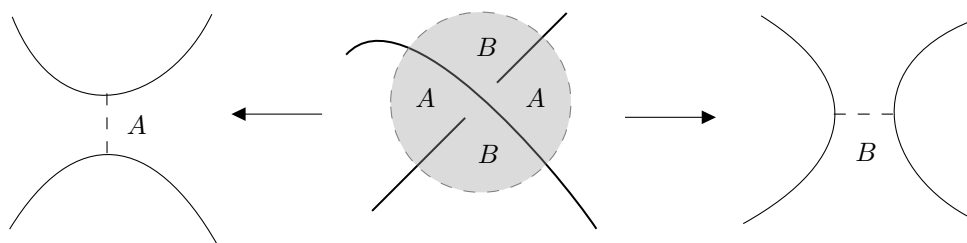


Figura 7: Descomposición e identificación de un cruce.

Cuando se de una descomposición como la de la izquierda en la figura 7, tendremos una *Etiqueta de tipo A* y cuando se de una descomposición como la de la derecha tendremos una *Etiqueta de tipo B*. De esta manera obtendremos una familia de *descendientes de un enlace*, entendiendo por descendientes de un enlace a los enlaces obtenidos luego de deshacer uno de sus cruces de alguna de las dos maneras. Notemos que si iteramos este procedimiento con n cruces llegaremos a 2^n enlaces y un diagrama compuesto por curvas de Jordan.

¹Este invariante puede ser usado para verificar que el nudo trébol no es equivalente al nudo trivial, para más detalles ver [5, p. 21-24].

Ejemplo 3.1. Si consideramos el nudo trébol 3_1 tendremos la siguiente descomposición

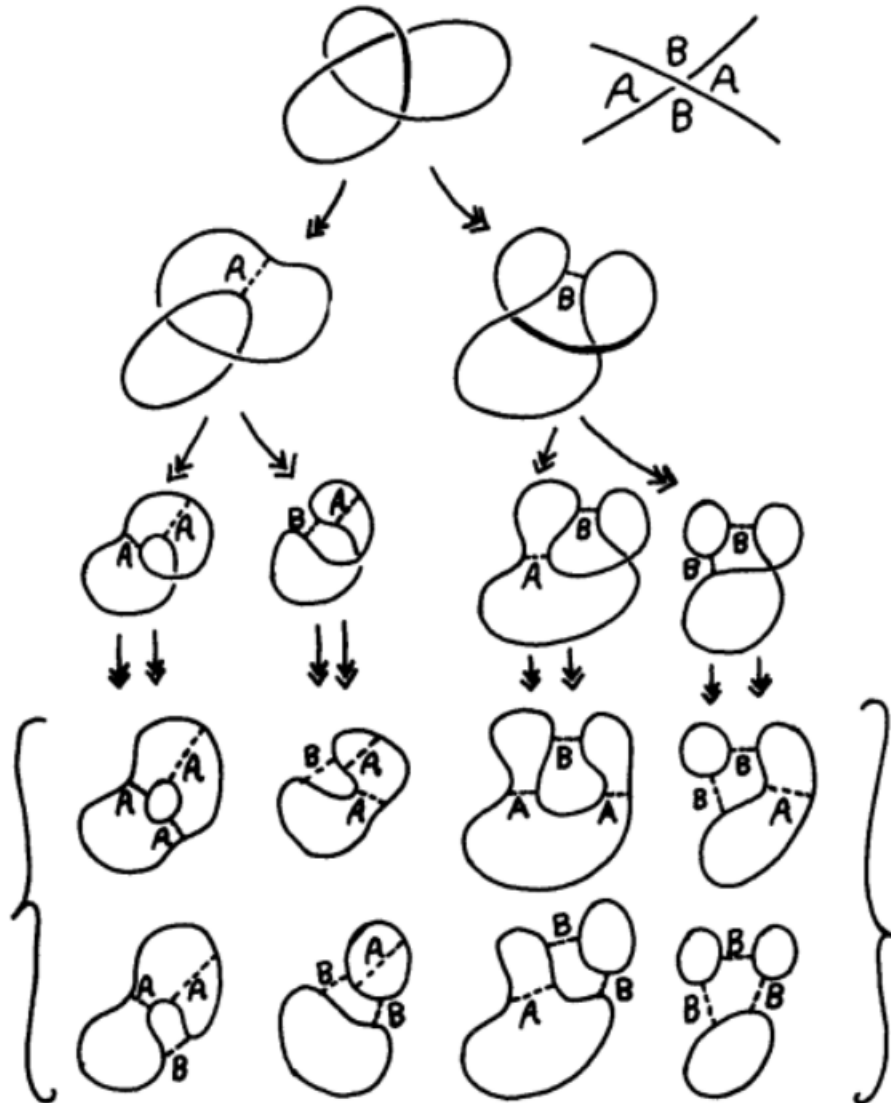


Figura 8: Descomposición del nudo trébol por Kauffman, recuperada de [5].

A los últimos descendientes de un enlace L los llamaremos *estados*, con los cuales definiremos la siguiente funciones:

Definición 3.2. Si L es un enlace, $\mathcal{E}(L)$ es el conjunto de todos los estados de L y σ uno de sus estados, el producto de etiquetas $\langle L|\cdot \rangle$ es tal que

$$\begin{aligned} \langle L|\cdot \rangle : \mathcal{E}(L) &\rightarrow \mathbb{Z}[A, B] \\ \langle L, \sigma \rangle &\mapsto A^n B^m \quad n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \end{aligned}$$

donde por $\mathbb{Z}[A, B]$ nos referimos al anillo de polinomios en las variables A y B con coeficientes en \mathbb{Z} .

Definición 3.3. Con la misma notación, si ℓ es la cantidad de loops o curvas de Jordan en el estado σ entonces

$$\|\sigma\| := \ell - 1$$

Ejemplo 3.4. Para uno de los estados del nudo trébol se tiene

$$\left\langle \text{trébol} \mid \begin{array}{c} B \\ \circ \\ \circ \\ B \end{array} \right\rangle = B^3 \quad \left\| \begin{array}{c} B \\ \circ \\ \circ \\ B \end{array} \right\| = 3 - 1 = 2$$

Con esto definimos finalmente el *polinomio corchete* o también conocido como el *corchete de Kauffman*

Definición 3.5. Sea L un enlace cuyo diagrama tiene n cruces, entonces el corchete de Kauffman se define como el polinomio en tres variables $\langle L \rangle \in \mathbb{Z}[A, B, d]$

$$\langle L \rangle = \langle L \rangle(A, B, d) = \sum_{i=1}^{2^n} \langle L | \sigma_i \rangle d^{|\sigma_i|}$$

donde σ_i son los estados de L .

Ejemplo 3.6. Del árbol de descomposición del nudo trébol de la Figura 8, podremos obtener

$$\begin{aligned} \langle \text{trébol} \rangle &= A^3 d^{2-1} + A^2 B^1 d^{1-1} + A^2 B^1 d^{1-1} + A^1 B^2 d^{2-1} + A^2 B^1 d^{1-1} + A^1 B^2 d^{2-1} + A^1 B^2 d^{2-1} + B^3 d^{3-1} \\ &= A^3 d + 3A^2 B + 3AB^2 d + B^3 d^2. \end{aligned}$$

Así, de la Definición 3.5 podemos deducir la siguientes propiedades

Proposición 3.7. Si L es un enlace y $L \sqcup \bigcirc$ denota la unión disjunta de L con una copia del nudo trivial,

- a) $\langle \bowtie \rangle = A \langle \nearrow \rangle + B \langle \searrow \rangle$
- b) $\langle L \sqcup \bigcirc \rangle = d \langle L \rangle$
- c) $\langle \bowtie \rangle = AB \langle \rangle \langle \rangle + (A^2 + B^2 + ABd) \langle \nearrow \rangle$
- d) $\langle \text{trébol} \rangle = (Ad + B) \langle \text{trébol} \rangle$
- e) $\langle \text{trébol} \rangle = (A + Bd) \langle \text{trébol} \rangle$

Así como lo definimos, el corchete de Kauffman no es un invariante en nuestro contexto, pues las propiedades c) y d) exhiben que en general no tendremos el mismo corchete Kauffman si aplicamos el primer movimiento de Reidemeister a nuestro enlace, es decir, el corchete de Kauffman no es invariante bajo isotopías de ambiente. Sin embargo, podemos buscar condiciones para que el corchete sea invariante en nuestros términos, es decir, que para dos enlaces isotópicos tengan el mismo polinomio, esto imponiendo condiciones sobre las variables A, B y d .

Ahora, para que el corchete de Kauffman sea invariante bajo isotopías regulares, únicamente debemos probar que es invariante bajo los movimientos de Reidemeister 2 y 3. En otras palabras, lo que estamos pidiendo es que

$$\langle \rangle \langle \rangle = \langle \bowtie \rangle = AB \langle \rangle \langle \rangle + (A^2 + B^2 + ABd) \langle \nearrow \rangle.$$

Una forma de lograr esta igualdad sería la siguiente

$$AB = 1$$

$$A^2 + B^2 + ABd = 0.$$

Con esto, obtenemos que una condición suficiente para tener un invariante bajo $\mathcal{R}2$ es $B = A^{-1}$ y $d = -A^2 - A^{-2}$ y podemos probar lo siguiente

Proposición 3.8. *El corchete de Kauffman con la sustitución $B = A^{-1}$ y $d = -A^2 - A^{-2}$ de un enlace L es invariante bajo el movimiento de Reidemeister 3. Esto significa que si L' es obtenido de un enlace L por una iteración de movimientos de Reidemeister 3 entonces*

$$\langle L \rangle(A, A^{-1}, -A^2 - A^{-2}) = \langle L' \rangle(A, A^{-1}, -A^2 - A^{-2})$$

Demostración. Dado que aplicar un movimiento de Reidemeister es un proceso local, para la prueba basta con fijarnos en la parte en la que se realiza $\mathcal{R}3$. Luego usando la invarianza bajo $\mathcal{R}2$ se tiene

$$\begin{aligned} \langle \text{Diagram 1} \rangle &= A \langle \text{Diagram 2} \rangle + B \langle \text{Diagram 3} \rangle \\ &= A \langle \text{Diagram 4} \rangle + B \langle \text{Diagram 5} \rangle \\ &= A \langle \text{Diagram 6} \rangle + B \langle \text{Diagram 7} \rangle \\ &= \langle \text{Diagram 1} \rangle \end{aligned}$$

■

Por ello, desde este momento nos referiremos a $\langle L \rangle(A, A^{-1}, -A^2 - A^{-2})$ simplemente como $\langle L \rangle$.

Nuevamente podremos darnos cuenta que, por las propiedades *d*) y *e*) en la Proposición 3.8, este no es un invariante bajo $\mathcal{R}1$ pues

$$\langle \text{Diagram 8} \rangle = (A(-A^2 - A^{-2}) + A^{-1}) \langle \text{Diagram 9} \rangle = (-A^3) \langle \text{Diagram 9} \rangle \quad (3.9)$$

$$\langle \text{Diagram 10} \rangle = (A + A^{-1}(-A^2 - A^{-2})) \langle \text{Diagram 9} \rangle = (-A^{-3}) \langle \text{Diagram 9} \rangle \quad (3.10)$$

Ahora, para obtener por completo un invariante bajo isotopías de ambiente, modificaremos un poco el corchete de Kauffman. Empezaremos dotando de una orientación a un nudo y luego asignándole un signo a cada cruce, como en la Figura 9. Donde si $\epsilon \in \{1, -1\}$ tendremos que $\epsilon(L_-) = -1$ y $\epsilon(L_+) = +1$. Con esto definimos la *torcedura*, también conocida como *writhe* en inglés:

Definición 3.11. *Sea L un diagrama de un enlace con una orientación. Definimos la torcedura de L , como*

$$w(L) := \sum_p \epsilon(p) \quad (3.12)$$

donde p recorre todos los cruces del enlace L .

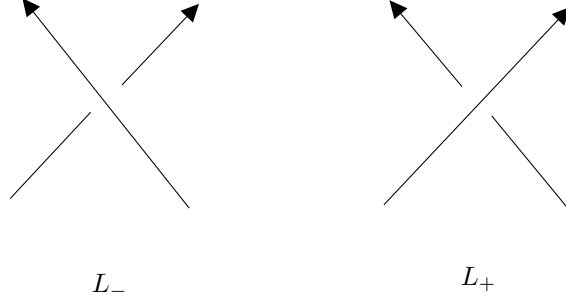


Figura 9: Cruces con orientación.

Con esto obtendremos nuestro candidato a invariante bajo los tres movimientos de Reidmeister.

Definición 3.13. *Definimos el corchete normalizado \mathcal{L}_L para un enlace L como*

$$\mathcal{L}_L = (-A^3)^{-w(L)} \langle L \rangle. \quad (3.14)$$

Luego, de 3.9 y 3.10 se sigue este si es invariante bajo $\mathcal{R}1$. Como $w(L)$ es invariante bajo isotopías regulares obtendremos que \mathcal{L}_L es un invariante bajo $\mathcal{R}1$, $\mathcal{R}2$ y $\mathcal{R}3$, es decir, invariante bajo isotopías de ambiente.

3.2. Polinomios de Jones y de Alexander-Conway

Antes que nada, notemos que una expresión de la forma $t + t^{-1}$ realmente no es un polinomio en el sentido estricto de la definición. Sin embargo existe una noción más general de polinomio la cual será la que manejaremos de ahora en adelante.

Definición 3.15. *Dados $m, n \in \mathbb{Z}$ con $n \leq m$, a la siguiente expresión*

$$p(x) = \sum_{n \leq k \leq m} a_k x^k \quad (3.16)$$

la llamaremos *polinomio de Laurent en x* . Nos referiremos al conjunto de todos los polinomios de Laurent donde $a_k \in \mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}[x, x^{-1}]$.

Notemos que con esta definición, el corchete de Kauffman y el corchete normalizado son polinomios de Laurent. Ahora con esto definiremos uno de los invariantes más famosos de la teoría de nudos, el polinomio de Jones.

Definición 3.17. *El polinomio de Jones $V_L(t)$ de un enlace orientado L , es un polinomio de Laurent en la variable $t^{1/2}$ que se define de la siguiente forma*

1. Si existe una isotopía de ambiente de L a L' , entonces $V_L(t) = V_{L'}(t)$.
2. $V_{\bigcirc}(t) = 1$
3. $t^{-1}V_{\succ}(t) - tV_{\prec}(t) = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) V_{\searrow}$

Con esta definición se puede calcular el polinomio de Jones para cualquier nudo. Sin embargo podemos calcularlo a través del corchete normalizado teniendo en cuenta el siguiente resultado:

Teorema 3.18. Sea $\mathcal{L}_L(A) = (-A^3)^{-w(L)}\langle L \rangle$, entonces

$$\mathcal{L}_L(t^{-1/4}) = V_L(t). \quad (3.19)$$

La prueba de esto puede ser encontrada en [5, p. 50].

De manera similar es posible definir el polinomio de Conway-Alexander.

Definición 3.20. Si es z una variable, el polinomio de Alexander $\nabla(z)$ (O Conway-Alexander) de un enlace orientado L , es un polinomio en $\mathbb{Z}[z]$ que se define de la siguiente forma

1. Si existe una isotopía de ambiente de L a L' , entonces $\nabla_L(z) = \nabla_{L'}(z)$.
2. $\nabla_{\bigcirc}(z) = 1$
3. $\nabla_{\times}(z) - \nabla_{\sphericalangle}(z) = z\nabla_{\sphericalangle}$

4. Conexiones con física

4.1. Teorema Spin-Estadística

La primera conexión surge de una dificultad con la que nos topamos con anterioridad. En 3.9 y 3.10, nos fijamos que el corchete de Kauffman no es invariante bajo movimientos $\mathcal{R}1$, esto se debe a que en realidad esto en general no nos da una “equivalencia topológica” pues si en lugar de considerar una cuerda unidimensional la consideramos como superficie, veremos que deshacer uno de estos cruces realmente nos lleva a tener giros en la misma superficie (claro si dejamos fijo el principio y el final de lo que antes era la cuerda).

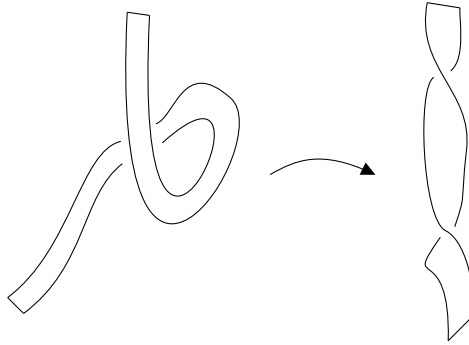


Figura 10: Movimiento de $\mathcal{R}1$ aplicado a un cruce.

Esto nos da una noción de una prueba topológica del conocido teorema de Spin-Estadística, el cual podemos encontrar en [11, p. 150] con lujo de detalle y enunciado de manera formal, pero se resume en lo siguiente

- a) Si Ψ es una función de onda simétrica bajo el intercambio de cualesquiera dos partículas de un sistema de partículas idénticas con spin s , entonces $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ o dicho de otra manera, las partículas son bosones.
- b) Si Ψ es la función de onda anti-simétrica bajo el intercambio de cualesquiera dos partículas de un sistema de partículas idénticas con spin s , entonces $s \in \{\frac{k}{2} \in \mathbb{Q}^+ \mid k \text{ impar}\}$, o dicho de otra manera, las partículas son fermiones.

Resulta que, el “cambio” $\Psi(x, y) \rightarrow \Psi(y, x)$ de la función de onda puede interpretarse como la superficie de la figura 10 antes de eliminar el cruce, más concretamente, si una partícula tiene una trayectoria como en la primera gráfica de la figura 11 y considerar el “cambio” como la superficie en la segunda gráfica, al tener una forma de variar continuamente la superficie para obtener la tercera gráfica, tendremos que $\text{sgn}(\Psi)$ no cambiará, pero en esta última gráfica lo que tenemos es un giro de 2π , lo cual caracteriza la partícula, por tanto, si el signo cambiase estaríamos ante un fermión y si no, ante un bosón.

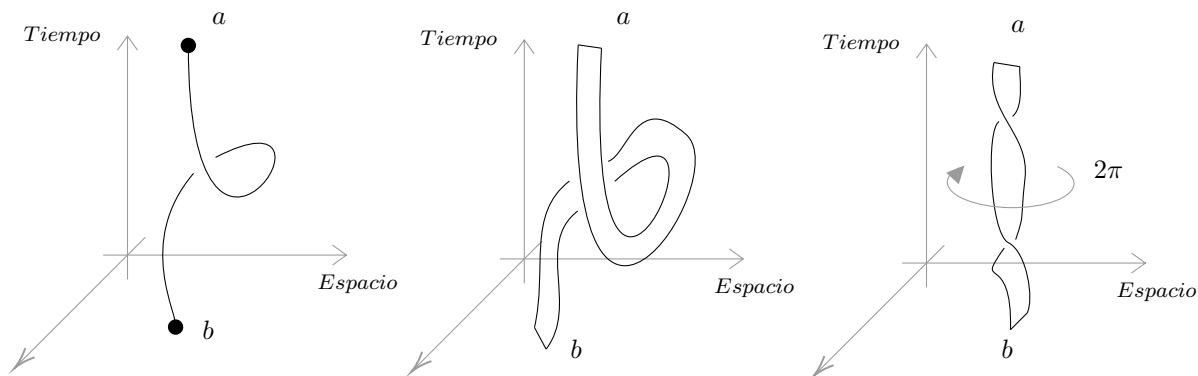


Figura 11: “Cambio” de una función de onda

Siendo esto un bosquejo de una prueba topológica de este teorema tan conocido con implicaciones en la estadística de Bose-Einstein, la cual se originó de preguntarnos ¿Por qué el corchete de Kauffman no es invariante bajo el $\mathcal{R}1$?

4.2. Mecánica Estadística

Nos centraremos ahora en una rama concreta de la física, y veremos que la construcción del corchete de Kauffman tiene una interpretación curiosa, la cual el mismo Kauffman menciona en [5]. Un escenario muy común es tener un sistema A que consiste en un número fijo N de partículas en un volumen V , pero la única información disponible de la energía del sistema es un promedio de la energía \bar{E} , donde para encontrar esta media debemos calcular la energía de todos los posibles estados de este sistema y promediarlos. Dicho de otra manera, si el sistema A tiene a estados y si la energía de cada estado es E_r , donde cada estado se repite a_r veces entonces

$$\frac{1}{a} \sum_r a_r E_r = \bar{E} \quad (4.1)$$

A cada uno de los estados con energía E_r se les conoce como microestados. Se denomina ensamble canónico, al conjunto de los posibles estados de un sistema (conjunto de partículas) que intercambia energía térmica con los alrededores, pero no materia.

Los sistemas en su ensamble estadístico representativo se distribuyen sobre todos los estados accesibles

de acuerdo a la distribución canónica. Para estas situaciones obtendremos que el promedio de la energía es

$$\bar{E} = \frac{\sum_r e^{-\beta E_r} E_r}{\sum_r e^{-\beta E_r}}, \quad (4.2)$$

donde el parámetro β se escoge precisamente para tener esta igualdad. Notemos ahora que la expresión del numerador puede escribirse como

$$\sum_r e^{-\beta E_r} E_r = - \sum_r \frac{\partial}{\partial \beta} (e^{-\beta E_r}) = - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\sum_r e^{-\beta E_r} \right) \quad (4.3)$$

de esta manera podemos reescribir 4.2 como

$$\bar{E} = - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\ln \left[\sum_r e^{-\beta E_r} \right] \right) \quad (4.4)$$

por lo que si

$$\mathcal{Z}(\beta) := \sum_r e^{-\beta E_r} \quad (4.5)$$

vale la pena fijarnos en la función $\mathcal{Z}(\beta)$, la cual recibe un nombre, se le conoce como *función de partición*. En general una función de partición puede definirse de la siguiente forma:

Definición 4.6. *Dado un conjunto de variables aleatorias X_i tomando valores x_i y algún tipo de función potencial o Hamiltoniano $H(x_1, x_2, \dots)$ la función de partición $\mathcal{Z}(\beta)$ se define como*

$$\mathcal{Z}(\beta) = \sum_{x_i} e^{-\beta H(x_1, x_2, \dots)} \quad (4.7)$$

donde β es un parámetro real.

Notemos que estas funciones guardan muchas similitudes con la Definición 3.5. Por ello, si vemos al nudo como un sistema y a cada uno de los últimos descendientes como un posible estado, el corchete de Kauffman puede interpretarse como una función de partición pues está sumando sobre todos estados y es invariante bajo ciertas transformaciones del sistema. Siendo esta una interpretación elegante que Kauffman usa en más de una ocasión en [5] concretamente para este invariante y el modelo Potts entre otros.

Referencias

- [1] Colin Conrad Adams. *The knot book: an elementary introduction to the mathematical theory of knots*. W.H. Freeman, 1994.
- [2] Stewart S. Cairns. “An Elementary Proof of the Jordan-Schoenflies Theorem”. En: *Proceedings of the American Mathematical Society* 2.6 (1951), págs. 860-867. ISSN: 00029939, 10886826. URL: <http://www.jstor.org/stable/2031698> (visitado 15-05-2024).
- [3] J Scott Carter y Masahico Saito. *Knotted surfaces and their diagrams*. Vol. 55. American Mathematical Society, 2023.
- [4] Youngsik Huh y Seungsang Oh. “An upper bound on stick number of knots”. En: *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* 20.05 (2011), págs. 741-747.
- [5] Louis H. Kauffman. *Knots and physics*. 3rd ed. World Scientific, 2001. ISBN: 978-058-54-5917-2,978-981-02-4111-7,978-981-02-4112-4. URL: <https://doi.org/10.1142/4256>.
- [6] James Munkres. *Topology*. 2nd ed. Prentice Hall, Inc, 2000. ISBN: 9780131816299,0131816292.
- [7] Seiya Negami. “Ramsey theorems for knots, links and spatial graphs”. En: *Transactions of the American Mathematical Society* 324.2 (1991), págs. 527-541.
- [8] R. H. Fox R. H. Crowell. *Introduction to knot theory*. 1963 Corr 4th Printing. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1984. ISBN: 978-038-79-0272-2,978-354-09-0272-0. URL: <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-9935-6>.
- [9] Frederick Reif. *Fundamentals of statistical and thermal physics*. Waveland Press, 2009.
- [10] Steven H Simon. “Topological Quantum: Lecture Notes and Proto-Book”. En: *Unpublished prototype.[online] Available at: http://www-thphys.physics.ox.ac.uk/people/SteveSimon* 26 (2020), pág. 35.
- [11] Raymond Frederick Streater y Arthur Strong Wightman. *PCT, spin and statistics, and all that*. Vol. 30. Princeton University Press, 2000.